*МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ*

**Московский государственный университет**
**экономики, статистики и информатики**
**Московский международный институт эконометрики,**
**информатики, финансов и права**

**А.Н. Малахов**

# РУКОВОДСТВО ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

**Москва 2002**

Малахов А.Н. Руководство по изучению дисциплины «Высшая математика» - М. Московский государственный университет экономики, статистики и информатики. 2002. –  31 с.

## Содержание

## 1. Цели, задачи изучения дисциплины и сферы профессионального применения.

Математический анализ относиться вместе с элементарной математикой к числу наук, изучающих количественные отношения действительного мира. Основное отличие математического анализа от элементарной математики состоит в том, что элементарная математика изучает "постоянные", а математический анализ- "переменные" величины. Основные понятия математического анализа (функция, предел, производная, интеграл) позволяют исследовать математически не только состояния, но и процессы, а также связи, существующие между этими процессами.

Математика является фундаментальной дисциплиной. Изучение математики предусматривает:

- развитие логического и алгоритмического мышления;
- овладение основными методами исследования и решения математических задач;
- выработку умения самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных (экономических) задач.

Математический анализ является фундаментом математического образования экономиста.

## 2. Необходимый объем знаний для изучения дисциплины.

Для изучения математического анализа необходимы знания элементарной математики в объеме средней школы (или среднего специального учебного заведения).

## 3. Перечень тем и подтем

### 3.1. Тема 1. Векторная алгебра

***Цель изучения*** – познакомиться с основными понятиями векторной алгебры и применением аппарата векторной алгебры для решения геометрических задач.

***Данная тема включает в себя :***

- понятия свободный вектор, равенство, коллинеарность, компланарность векторов,
- линейные операции с векторами (сумма векторов, произведение вектора на скаляр, разность векторов),

- базис в пространстве, координаты вектора в базисе, ортонормированный базис, декартова прямоугольная система координат, координаты точки),
- нелинейные операции с векторами (скалярное, векторное смешанное произведения).

***Изучив тему 1, студент должен:***

***Знать***: определения основных понятий, свойства всех операций с векторами, выражение всех операций с векторами в координатной форме, условия необходимые и достаточные для: коллинеарности двух векторов перпендикулярности (ортогональности) двух векторов компланарности трех векторов.

***Уметь:*** решать задачи, связанные с линейными и нелинейными операциями с векторами, приобрести навыки применения аппарата векторной алгебры для решения геометрических задач.

***При изучении темы 1 необходимо:***

читать п.п. 1.1. – 1.3. учебника «Высшая математика» (Никишкин В.А., Максюков Н.И., Малахов А.Н.)

решить задачи № 372 – 449 из «Сборника задач по Высшей матиматике» Минорского.

***Вопросы и задания для самооценки:***

ЧТО НАЗЫВАЕТСЯ: вектором , равными векторами, коллинеарными векторами, компланарными векторами, суммой векторов, произведением вектора на скаляр, разностью векторов, координатами вектора в базисе, скалярным произведением векторов, векторным произведением векторов, смешанным произведением векторов.

ПЕРЕЧИСЛИТЬ СВОЙСТВА: суммы векторов, произведения вектора на скаляр, скалярного произведения векторов, векторного произведения векторов, смешанного произведения векторов.

СФОРМУЛИРОВАТЬ НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ: коллинеарности векторов, ортогональности (перпендикулярности) векторов, компланарности векторов.

ЗАПИСАТЬ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ : линейную комбинацию векторов, скалярное произведение векторов, векторное произведение векторов, смешанное произведение векторов.

ЗАПИСАТЬ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ: косинуса угла между векторами, площади параллелограмма, построенного на векторах, как на сторонах, объема параллелепипеда, построенного на трех векторах

## 3.2. Тема 2. Геометрия на плоскости и в пространстве

***Цель изучения*** – понять возможность представления геометрических образов в форме уравнений, изучить особенности геометрических образов, соответствующих линейным и квадратным уравнениям в прямоугольной системе координат; познакомиться с полярной системой координат; понять возможность представления поверхностей и линий в форме уравнений или систем уравнений, изучить особенности геометрических образов, соответствующих линейным и квадратным уравнениям в прямоугольной системе координат.

***Данная тема включает понятия:***

- линия, соответствующая уравнению $F(x,y)=0$ в прямоугольной системе координат, линия, соответствующая уравнению $F(r,\varphi)=0$ в полярной системе координат,
- виды уравнения прямой в прямоугольной системе координат (общее, с угловым коэффициентом, в отрезках, нормальное),
- канонические уравнения кривых второго порядка (окружность, эллипс, гипербола, парабола),
- параллельный перенос прямоугольной системы координат.
- поверхность, соответствующая уравнению $F(x,y,z)=0$ в прямоугольной системе координат, геометрический образ, соответствующий системе уравнений,
- соответствие линейного уравнения и плоскости,
- нормальный вектор и направляющие вектора плоскости,
- нормальное уравнение плоскости,
- поверхности второго порядка соответствующие уравнениям второго порядка в пространственной прямоугольной системе координат.

***Изучив тему 2, студент должен:***

***Знать*** основные виды уравнения прямой (с угловым коэффициентом, в отрезках, нормальное, общего вида) в прямоугольной системе координат и геометрический смысл коэффициентов этих уравнений, способ определения угла между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых, определения, канонические уравнения и геометрические свойства окружности, эллипса, гиперболы, параболы изменение вида уравнения линии при параллельном переносе прямоугольной декартовой системы координат. основные два способа задания плоскости в пространстве (точка и нормальный вектор, точка и два направляющие вектора) и вид уравнения плоскости в каждом случае, особенность нормального уравнения плоскости и его применение для вычисления расстояния от точки до плоскости, способ определения угла между плоскостями, канонические, параметрические уравнения прямой в пространстве; канонические уравнения и геометрические свойства сферы, эллипсоида, гиперболоида, параболоида, особенность уравнения цилиндрической поверхности с образующей, параллельной одной их координатных осей

***Уметь:*** решать геометрические задачи, связанные с прямой и кривыми второго порядка, решать геометрические задачи, связанные с прямой и плоскостью в пространстве.

***Приобрести навыки*** определения формы линии, заданной уравнением в прямоугольной и полярной системах координат, определения формы поверхности, заданной уравнением в прямоугольной и цилиндрической системах координат

***При изучении темы 2 необходимо :***

читать п.п. 1.4. – 1.5.; 3, 2* учебника «Высшая математика» (Никишкин В.А., Максюков Н.И., Малахов А.Н.).

Решить задачи 1 – 139; 450 – 535 из «Сборника задач по Высшей математике» (Минорский).

***Вопросы и задания для самооценки:***

ЧТО НАЗЫВАЕТСЯ: уравнением линии в системе координат, окружностью, эллипсом, гиперболой, параболой. СФОРМУЛИРОВАТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, СВЯЗАННОЕ С ЕЕ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОМ ЗАПИСАТЬ УРАВНЕНИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА с центром (вершиной для параболы), смещенным относительно начала координат, и осями, параллельными координатным осям.

ЗАПИСАТЬ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ косинуса угла между прямыми, тангенса угла между прямыми, расстояния от точки до прямой, эксцентриситета эллипса и гиперболы.

записать уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору,

записать уравнение плоскости, проходящей через заданную точку параллельно двум заданным неколлинеарным векторам,

записать уравнение плоскости, проходящей через три точки,

записать канонические, параметрические уравнения прямой, проходящей через заданную точку параллельно заданному вектору,

записать канонические, параметрические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки,

записать канонические, параметрические уравнения прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданной плоскости,

записать условия необходимые и достаточные для перпендикулярности, параллельности, совпадения двух плоскостей, записать условия необходимые и достаточные для перпендикулярности, параллельности, пересечения двух прямых,

записать условия необходимые и достаточные для перпендикулярности, параллельности прямой и плоскости, принадлежности прямой плоскости, записать формулы для вычисления косинуса угла между прямыми, между плоскостями, расстояния от точки до плоскости, расстояния от точки до прямой,

схематически строить поверхность, заданную уравнением первого и второго порядка

### 3.3. Тема 3. Вещественные и комплексные числа.

Изучение этой темы позволяет освоить логическую символику, операции над множествами, процесс расширения понятия числа: натуральные числа$\to$ целые числа$\to$ рациональные числа, действительные числа$\to$ комплексные числа; счетные множества; несчетные множества, континуум.

Данная тема включает в себя:

1) Понятие числа. Натуральные, целые и рациональные числа. Вещественные числа, изображение вещественных чисел как точек оси координат.
2) Некоторые конкретные множества вещественных чисел
3) Понятие о комплексных числах. Действия над комплексными числами. Геометрическая интерпретация.
4) Тригонометрическая форма комплексного числа.

***Изучив данную тему, студент должен***

***Знать***

- определения натуральных, целых, рациональных, вещественных чисел.
- определения конкретных множеств вещественных чисел(сегмент, полусегмент, интервал, окрестность и т.д.).
- определения комплексного числа.
- Действия с комплексными числами.
- Тригонометрическую форму комплексного числа

***Уметь:***

Производить операции с комплексными числами, применять формулу Муавра.

***При изучении данной темы студенту необходимо изучить из [1]***

П.п 4.1.1-4.1.4. из [6] гл. IV § 3

Выполнить задания из [6] №650-659.

***Вопросы и предложения для самопроверки.***

1. Какие числа образуют множество действительных чисел ? (комплексных чисел).
2. Что называется числовой осью?
3. Что называется интервалом ?
4. Определить понятие окрестности точки.
5. Геометрическая интерпретация комплексного числа.
6. Определить тригонометрическую форму комплексного числа.

Решить задачи:

1) Выполнить действия

$(2+3i)(3-2i)$; $(3-2i)^2$; $\frac{1+i}{1-i}$; $\frac{3i}{1+i}$

2) вычислить по формуле Муавра

$(1+i)^{10}$ ; $(1-i\sqrt{3})^6$; $(1+\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^4$

## 3.4. Тема 4. Числовые последовательности.

В этой теме осваиваются понятия: числовой последовательности, её предела; свойств последовательностей, числа е, как предела последовательности $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$. Рассмотрим в качестве примера следующую задачу экономического характера, связанную с понятием числовой последовательности и её пределом.

Задача. Банк принимает деньги у населения с начислением 100% годовых. Во сколько раз возрастет сумма вклада через год, если начисления производить:

1) в конце года;
2) в конце каждого месяца (с пересчетом суммы вклада);
3) ежедневно;
4) «ежемгновенно» ?

Решение:

Пусть начальная сумма вклада равна А рублей, в первом случае через год сумма вклада составит А $+\frac{100}{100}A=2A$ рублей. Сумма вклада удвоилась. Во втором случае начисление процентов производиться ежемесячно, и в конце года сумма вклада составит $A(1+\frac{1}{12})^{12}$ рублей, то есть возрастет в $(1+\frac{1}{12})^{12}\approx 2{,}613$ раз. В третьем случае аналогичные рассуждения приведут к увеличению вклада в $(1+\frac{1}{365})^{365}\approx 2{,}715$ раз.

Нетрудно вывести и общую формулу пересчета для случая, когда весь год делиться на n периодов, в конце каждого из которых производиться пересчет суммы вклада: $A_n = A(1+\frac{1}{n})^n$

Это так называемая формула сложных процентов. И, наконец, в последнем случае, когда банк будет начислять "ежемгновенные" проценты нашего вклада с учетом сложных процентов(это означает предельный переход к бесконечному числу пересчетов или к бесконечно малому времени между просчетами), сумма вклада в конце года возрастет в $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ раз, т е. в *e* раз *e* ≈ 2,71828. Итак, мы можем теперь указать экономический смысл числа *e* . При "ежемгновенном " начислении процентов в банке каждый вложенный под 100% годовых рубль через год превратиться в *e* рублей. Как видно, реальная годовая процентная ставка в этом случае составит приблизительно 172%.

***Изучив эту тему студент должен***

***Знать:***

1. Числовые последовательности и операции над ними.
2. Определения ограниченной и неограниченной последовательности, бесконечно малой и бесконечно большой последовательности. Основные свойства бесконечно малых последовательностей.
3. Понятие сходящейся последовательности. Основные свойства сходящейся последовательности.
4. Последовательность $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$. Число *e*.

***Уметь***

- Находить предел последовательности
- Определять тип последовательности.

При изучении этой темы студенту необходимо изучить из [1] п.п 4.2.1-4.2.11

Выполнить задания: из [6] № 725-733

***Вопросы для самопроверки:***

1. Привести примеры числовых последовательностей
2. Сформулируйте основные теоремы о пределах
3. Пользуясь определением предела последовательности доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} = 0$
4. Клиент положил 1000 рублей в банк под сложные проценты (1 % в месяц). Спустя полгода банк повысил процентную ставку до 1,5% в месяц. Какова будет сумма вклада через 1 год.

4а При какой банковской процентной ставке сумма вклада через год удвоиться, если начисления производить: а) ежеквартально; б) ежемесячно; в) "ежемгновенно" ?

## 3.5. Тема 5. Понятия функции. Элементарные функции. Предел функции.

Понятие функции является одним из основных понятий математического анализа. Рассмотрим некоторые примеры, связанные с этим понятием.

Задача 1. Найти области определения функций:

а) $y = \sqrt{x+1}$

б) $y = \sqrt{5-x}$

в) $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{5-x}$

г) $y = \sqrt{x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$

д) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$

Решение а) для вычисления значения функции $y = \sqrt{x+1}$ по заданному значению аргумента x надо сложить с x число 1, а затем из полученного результата извлечь квадратный корень. Первая из этих операций выполнима при любом значении x, следовательно, её можно не учитывать при отыскании области определения функции. Вторая операция может быть выполнена только в том случае, если величина $x+1\geq 0$. Следовательно, область определения функции $y = \sqrt{x+1}$ является решением неравенства $x+1 \geq 0$, т.е. $x \geq -1$.

б) Аналогично $x \leq 5$

в) Здесь надо потребовать , чтобы одновременно существовали выражения $\sqrt{x+1}$ и $\sqrt{5-x}$. Следовательно, областью определения будет $-1 \leq x \leq 5$.

г) Здесь кроме извлечения корней из x+1 и 5-x приходиться еще делить на $\sqrt{x+1}$. А так как делить на нуль нельзя, то условие $x+1\geq 0$ заменяется на условие $x+1> 0$. Следовательно, область определения рассматриваемой функции получается в результате решения неравенств $x+1\geq 0$ и $5-x> 0$, т.е. $-1 \leq x < 5$

д) Аналогично, решая систему неравенств: $x+1 >0$ и $5-x >0$ ,т.е. $-2 <x < 5$

Следует обратить внимание, что в определении предела функции не учитывается значение функции в предельной точке; иначе говоря, величина $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не зависит от величины $f(x_0)$. Более того, значение $f(x_0)$ может даже и не существовать. Отсюда следует, что под знаком предела можно производить тождественные преобразования аналитического выражения, задающего функцию, не принимая во внимание поведение функции в предельной точке. В частности, например, под знаком предела можно производить сокращение дроби на множитель, обращающийся в предельной точке в нуль (но не равный нулю вблизи этой точки !).

Иногда это позволяет в тех случаях, когда применение теорем о пределах невозможно, сделать возможным их применение после некоторых преобразований под знаком предела.

***Данная тема включает в себя:***

1. Общее понятие функции. Способы задания.
2. Основные элементарные функции и их графики.
3. Предел функции по Коши и Гейне, эквивалентность этих определений.
4. Арифметические операции над функциями, имеющими предел.
5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их сравнение.

***Изучив данную тему студент должен***

***Знать:***

- Способы задания функции, примеры
- Графики основных элементарных функций
- Определения предела функции по Коши и Гейне
- Критерий Коши для существования предела функции
- Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их сравнение

***Уметь:***

- Преобразовывать графики функций (сдвиги, растяжения, симметрические преобразования относительно осей координат)
- Вычислять пределы функций
- Проводить сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций.

*При изучении этой темы следует прочитать* из [1] п.п. 4.3.1 – 4.3.12

*Выполнить задания* из [6] № 695- 701, 753- 762, 791- 795, 811-813.

***Для самооценки темы ответить на вопросы и предложения.***

- Какая функция называется элементарной
- Дать определения алгебраической, рациональной, транцендентной функции

- Какая функция называется возрастающей (убывающей) в интервале
- Как определяются однозначные ветви функции, обратной для монотонной функции
- Начертить графики показательных функций при различных основаниях и описать поведение этих функций
- Что такое предел функции $y= f(x)$ при $x \to x_0$ ?
- Дать примеры функций, являющихся бесконечно большими величинами при различных предельных поведениях аргумента
- Какова простейшая связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами

***Решить задачи:***

Найти пределы:

$$\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 - x + 1});\qquad \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt[4]{1+2x} - 1};$$

$$\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2 - 4x});$$

## 3.6. Тема 6. Непрерывность функций

Цель изучения данной темы – освоение понятия непрерывности функции, классификации точек разрыва.

Данная тема включает в себя:

1. Непрерывность функции в точке и в области
2. Арифметические операции над непрерывными функциями
3. Понятие обратной функции, её непрерывность; монотонные функции
4. Предельные значения функций $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ и $(1+\frac{1}{x})^x$ при $x \to \infty$
5. Понятие сложной функции. Класс элементарных функций. Непрерывность элементарной функции в области её определения
6. Точки разрыва функции и их классификация.

***Изучив данную тему, студент должен***
***Знать:***

- Определение непрерывности функции в точке и области
- Условия непрерывности функции
- Условия существования и непрерывности обратной функции

- Условия непрерывности сложной функции
- Первый и второй специальные пределы
- Классификацию точек разрыва функции

***Уметь:***

- Определять непрерывность функции
- Применять замечательные пределы для вычисления пределов функций
- Доказывать непрерывность элементарных функций
- Проводить классификацию точек разрыва

***При изучении данной темы студенту необходимо:***

- Использовать [1] п.п 4.3.13- 4.3.18 учебника " Высшая математика"(Никишкин В.А., Максюков Н.И., Малахов А.Н.);

- Выполнить задания из [6] №823 – 826, 844 – 847

***Задания и вопросы для самооценки:***

1. Дать определение непрерывности функции $y= f(x)$ в точке $x_0$ и иллюстрировать его геометрически.
2. Что называется точкой разрыва?
3. Привести примеры разрывных функций различного характера
4. Что можно сказать об интервале непрерывности элементарной функции ? Какие точки могут являться точками разрыва такой функции?
5. Чему равны $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log a(1+x)}{x}$ ?

***План семинарских занятий***

1. Примеры непрерывных и разрывных функций
2. Определение характера разрыва
3. Вычисление пределов функций с использованием специальных пределов

Во время семинарских занятий следует использовать прикладной пакет "Математика"

***Тесты для самооценки***

1. Найти точки разрыва и определить их характер у функций:

1) $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ 2) $y=arctg\dfrac{a}{x-a}$ 3) $y=\dfrac{x^3-x^2}{2(x-1)}$

2. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{ctg^2 x}$

## 3.7. Тема 7. Производная и дифференциал функции.

Цель изучения данной темы – освоение понятия производной и дифференциала, их свойств, геометрического смысла.

Данная тема включает в себя

1. Понятие производной. Геометрический и физический смысл производной. Правая и левая производные
2. Правила дифференцирования
3. Уравнения касательной и нормали к плоской кривой
4. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала
5. Производные и дифференциалы высших порядков

***Изучив данную тему студент должен***
***знать***

- Определение и геометрический смысл производной
- Таблицу производных и правила дифференцирования
- Методы нахождения касательных и нормалей к плоским кривым
- Определение дифференциала и его геометрический смысл

***Уметь:***

- Находить производную произвольной функции
- Находить дифференциал от произвольной функции
- Находить производные и дифференциалы высших порядков

***При изучении данной темы студенту необходимо:***

- Использовать п.п 5.1-5.13 учебника "Высшая математика"(Никишкин В.А., Максюков Н.И., Малахов А.Н.)
- Выполнить задания № 865-873; 895-903; 916-925; 1008-1020; 1074-1077 из сборника задач по высшей математике Минорского В.П.

***Задания и вопросы для самооценки:***

1. Дать определение производной данной функции
2. Что называется касательной прямой к линии в данной её точке?
3. Каков геометрический смысл производной?
4. В чем заключается правило дифференцирования сложной функции? Обратной функции?
5. Вывести формулы для производных всех основных элементарных функций
6. В чем состоит прием логарифмического диффенцирования?
7. Что называется дифференциалом функции? Как выражается дифференциал функции через её производную?
8. Каков геометрический смысл дифференциала данной функции $y=f(x)$

9. В чем состоит свойство инвариантности вида дифференциала первого порядка

10. Какая функция наз. дифференцируемой ?В чем состоит необходимое условие дифференцируемости функции?

11. Привести примеры непрерывных, но недефференцируемых функций

12. Что наз. производной n-ого порядка данной функции?

13. Сформулировать правило Лейбница для дифференцирования произведения функций.

14. Что называется дифференциалом n-ого порядка данной функции?

***Решить задачи:***

1. Найти производные от функций

$$y = \frac{tg^2 x}{2} + ln\,cos\,x$$

$$y = arcsin^2 \sqrt{x}$$

$$y = x^{cos^2 x}$$

2. Найти дифференциалы функций:

$$y = x^n$$

$$y = cos^2 x$$

$$y = arcsin\frac{1}{x}$$

3. Найти производную n-ого порядка от функций:

$$y = e^{-\frac{x}{a}}; y = ln\,x; y = \sqrt{x}; y = x^n; y = sin\,x$$

### 3.8. Тема 8. Приложения производной.

Цель изучения данной темы – освоение методов приложения производной и построение графика.

Данная тема включает в себя:

1. Основные теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях

2. Правило Лопиталя о раскрытии неопределенностей вида $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty}$.

3. Формула Тейлора для многочлена и для произвольной функции.

4. Интервал возрастания и убывания функции, достаточные условия экстремума.

5. Выпуклость, вогнутость графика функции, точки перегиба. Необходимое и достаточные условия перегиба.

6. Асимптоты графика функции.

7. Общая схема исследования функции и построения её графика.

8. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на сегменте.

***Изучив данную тему , студент должен***

***Знать:***

- Теоремы: об обращении в нуль непрерывной функции при смене знака; о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение; об ограниченности функции, непрерывной на сегменте, о достижении функцией, непрерывной на сегменте, своих точных верхней и нижней граней.
- Понятие локального экстремума, теорему Ферма(необходимое условие локального экстремума).
- Теоремы: Ролля(о нуле производной); Лагранжа(о конечных приращениях); Коши; формула конечных приращений.
- Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.
- Формулу Тейора.
- Теоремы о достаточном условии возрастания(убывания) функции на интервале.
- Первое и вторoе достаточные условия существования экстремума.
- Необходимое и достаточное условия существования перегиба.
- Общую схему исследования функции и построения её графика.

***Уметь:***

- Применять правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей.
- Использовать формулу Тейлора для произвольной функции.
- Находить интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума функции.
- Находить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба.
- Находить асимптоты графика функции.
- Применять общую схему исследования функции и построения графика.
- Находить наибольшее и наименьшее значения функции на сегменте.

***При изучении этой темы необходимо:***

- Читать учебник [1] п.п. 5.14-5.15.9
- Выполнить задания из [6] №1117-1121; 1144-1155; 1193-1221; 1254-1262.

***Для самооценки темы нужно ответить на вопросы:***

1. Сформулировать и доказать теоремы: Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши, объяснить их геометрический смысл.
2. Сформулировать необходимый признак экстремума. Привести примеры, показывающие, что он не является достаточным.
3. Как отыскать наибольшее и наименьшее значения функции на данном интервале?
4. Сформулировать второй достаточный признак экстремума? Доказать его.
5. В чем состоят первый и второй достаточные признаки для существования точек перегиба?
6. Изложить теорему Лопиталя. Привести различные примеры применения правила Лопиталя.
7. Описать общую схему исследования функций.

***Решить задачи:***

Исследовать функции и построить графики:

1) $y^2 = x^3$;

2) $y = 2 + \dfrac{12}{x^2 - 4}$

3) $y = \dfrac{e\ln x}{x}$

по предыдущим темам выполняется типовой расчет по методическим указаниям [2].

## 3.9. Тема 9. Неопределенный интеграл.

Цель изучения данной темы знакомство с понятием неопределенного интеграла, изучение методов интегрирования.

Данная тема включает в себя:

1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла. Основные свойства неопределенного интеграла.

2. Таблицу основных неопределенных интегралов.
3. Методы нахождения неопределенных интегралов.

***Изучив данную тему студент должен***
***Знать:***

- Определения первообразной функции и неопределенного интеграла
- Основные свойства неопределенного интеграла
- Таблицу основных неопределенных интегралов

- Методы интегрирования заменой переменной и по частям
- Интегрирование правильных рациональных дробей
- Интегрирование тригонометрических функций
- Интегрирование дробно-линейных иррациональностей

***Уметь:***

- Использовать таблицу основных неопределенных интегралов.
- Владеть методами интегрирования: заменой переменной, по частям.
- Раскладывать правильную рациональную дробь на простейшие.
- Применять тригонометрические подстановки.

***При изучении этой темы необходимо***

- читать [1] п.п. 6.1- 6.9
- выполнить задания из [6] № 1350-1359; 1375- 1382; 1409-1418; 1444-1452; 1482-1499

***Для самооценки темы нужно ответить на следующие вопросы:***

1. Что называется первообразной от данной функции ? Привести примеры.
2. Что наз. неопределенным интегралом от данной функции ?
3. Как производиться разложение правильной рациональной дроби на простейшие ?
4. Привести примеры интегрирования простейших иррациональных функций
5. Описать методы вычисления интегралов вида

   $\int sin^n x \cdot cos^m xdx,$ где m и n – целые числа

***Решить следующие задачи:***

1) $\int ln\, xdx;$
2) $\int tgxdx;$
3) $\int sin^2 x cos^2 xdx;$
4) $\int \sin^2 x \cos^3 xdx;$
5) $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx;$
6) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx;$
7) $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}};$

8) $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{2 - x^3}}$;

9) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

## 3.10. Тема 10. Определенный интеграл.

Цель изучения этой темы: понятие определенного интеграла (Римана) и

его приложения.

Данная тема включает в себя

1) Понятие определенного интеграла, интегральных сумм, их свойств.
2) Верхний и нижний интегралы Дарбу. Теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости в смысле Римана функции на сегменте.
3) Основные свойства определенного интеграла. Формулу Ньютона-Лейбница вычисления определенного интеграла.
4) Применение определенного интеграла для вычисления: дуги плоской кривой, площади плоской фигуры, объемов тел вращения.
5) Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.
6) Несобственные интегралы от неограниченных функций.

***Изучив данную тему студент должен***

***Знать:***

- Понятие определенного интеграла
- Теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции на сегменте
- Основные свойства определенного интеграла
- Формулу Ньютона-Лейбница
- Формулы замены переменной и интегрировании по частям для определенного интеграла
- Теорему о достаточных условиях спрямляемости и длине дуги плоской кривой
- Теорему о необходимом и достаточном условии квадрируемости плоской фигуры
- Теорему о необходимом и достаточном условии кубируемости конечного пространственного тела
- Несобственные интегралы 1 и 2 рода

***Уметь:***

- Вычислять определенные интегралы
- Находить длину дуги плоской кривой

- Вычислять площадь плоской фигуры
- Вычислять объем тела вращения
- Исследовать на сходимость несобственные интегралы 1 и 2 рода.

***При изучении данной темы необходимо :***

- Читать [1] п.п. 7.1-7.12
- Выполнить задания [6] №1614-1620; 1653-1668; 1681-1690; 1705-1709; 1718-1721; 1761-1765

***Для самооценки темы нужно ответить на следующие вопросы:***

1) Как определяется площадь криволинейной трапеции ?
2) Сформулировать и доказать простейшие свойства определенного интеграла.
3) Каков геометрический смысл определенного интеграла от данной функции *y=f(x)* в данном интервале [a,b] в системе декартовых координат?
4) Чему равна производная от интеграла по верхнему пределу
5) Как вычисляется площадь плоской фигуры в системе декартовых координат ? в системе полярных координат?
6) Что называется несобственным интегралом 1 рода? Второго рода?
7) Какой несобственный интеграл наз. абсолютно сходящимся и какой условно сходящимся ?

***Решить задачи:***

1. Вычислить площадь ограниченную линиями:
   1) $y = 4 - x^2, y = 0$
   2) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$

2. определить объем тела, образованного вращением фигуры ограниченной линиями:
   1) $y^2 = 2px$ и x=h вокруг оси Ox
   2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и $y = \pm b$ вокруг оси Oy

3. определить длину дуги кривой:
   1) $y^2=x^2$, отсеченной прямой $x = \dfrac{3}{4}$
   2) всей кривой $x^2+y^2=R^2$

4. Исследовать сходимость интегралов

1) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$

2) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{(x-2)^2}$

3) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$

4) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^4}$

По темам неопределенный и определенный интеграл выполняется типовой расчет по метод. указаниям [4].

### 3.11. Тема 11. Функции нескольких переменных

Цель изучения данной темы - совершенствование математического аппарата, формирование у студентов понятия функции нескольких переменных, отражающего многофакторные зависимости многих, в том числе экономических, явлений.

Данная тема включает в себя:

1. Понятие функции нескольких переменных (фнп).
2. Предел и непрерывность фнп.
3. Частные производные фнп.
4. Дифференциал и понятие дифференцируемости фнп.
5. Геометрический смысл дифференцируемости функции двух переменных, уравнение касательной плоскости.
6. Производная по направлению, градиент.
7. Экстремум фнп, частные производные высших порядков, необходимое и достаточное условие экстремума функции двух переменных.
8. Наибольшее и наименьшее значение функции.
9. Условный экстремум.
10. Прикладные методы исследования фнп.
11. Понятие двойного интеграла.

***Изучив данную тему, студент должен***

***Знать***

- понятие фнп;
- определения предела, непрерывности, дифференцируемости;
- необходимое и достаточное условия дифференцируемости;

- геометрический смысл дифференцируемости функции двух переменных;

- понятия частных производных, производных по направлению, градиента, линии уровня;

- необходимое и достаточное условие экстремума;

- понятие условного экстремума;

- понятие двойного и повторного интеграла, геометрический смысл

двойного интеграла.

***Уметь***

- привести примеры фнп, применяемых в экономике;

- переносить свойства пределов и непрерывных функций в двумерном пространстве на многомерный случай;

- находить частные производные фнп;

- составлять уравнение касательной плоскости;

- строить градиент и линии уровня функции двух переменных;

- исследовать функцию двух переменных на экстремум, наибольшее и наименьшее значения;

- находить точки условного экстремума;

- вычислять простейшие двойные интегралы на элементарных множествах;

- применять методы множителей Лагранжа для отыскания условного

экстремума и наименьших квадратов для получения эмпирических формул.

Студент должен приобрести навыки исследования поведения и построения графика функции двух переменных с помощью прикладного пакета «Математика» а также использования функций нескольких переменных в экономической теории.

***При изучении данной темы студенту необходимо:***

- изучить п.п. 8.1, 8.2, 8.5.1, 8.6.4, 8.9, 8.10. учебника «Высшая математика» (Никишкин В.А., Максюков Н.И;, Малахов А.Н.);

- выполнить задания, главы XI из [6].

***Задания и вопросы для самооценки.***

1. Следует акцентировать внимание на взаимосвязях свойств непрерывности, дифференцируемости, существования и непрерывности частных производных, существования касательной плоскости. Построить схему этих взаимосвязей и придумать примеры, в которых выполняются одни их указанных свойств и не выполняются другие.

2. Что характеризует градиент? Как он связан с линиями уровня? Чему равен градиент в точке экстремума?

3. Какова разница между стационарной точкой, точкой экстремума, седловой точкой, точкой условного экстремума?

4. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - 2xy + 4y^3$.

5. Вычислить интеграл $\iint\limits_G (x + y^2)dxdy$ по области G, ограниченной кривыми $y=x$ и $y=x^2$.

***План семинарских занятий.***

1. Примеры фнп, графики функций двух переменных, пределы, нахождение частных производных, примеры дифференцируемых и недифференцируемых функций, составление уравнений касательных плоскостей.

2. Построение градиентов, нахождение производных по направлению, исследование функций двух переменных на экстремум, нахождение точек условного экстремума.

3. Прикладные методы исследования фнп; Вычисление двойных интегралов.

Во время семинарских занятий следует использовать прикладной пакет «Математика».

**ТЕСТЫ**

1. Что из себя представляют линии уровня функций?

1.1. $z=xy+8y+2x$ 1.2. $5x^2+8y-2x+l$

1.3. $x^2+6x+y^2-4y+5$ 1.4. $(y-3x+2)/x$

а) прямые
б) параболы
в)гиперболы
г) окружности

2. В какой точке нарушается свойство дифференцируемости функции

$Z = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ **?**

а) (3, 3)
б) (3, -3)
в) (3,1/3)
г) функция везде дифференцируема

3. Какое из условий является необходимым условием дифференцируемости функции двух переменных в точке **M**?

а) ее частные производные непрерывны

б) градиент в точке **M** равен **O**

в) в этой точке существует касательная плоскость к графику функции

г) функция разрывна в этой точке

4. Какое из утверждений истине?

а) градиент перпендикулярен касательной плоскости

б) градиент является производной по направлению

в) градиент является касательной к линии уровня

г) градиент определяет направление максимальной скорости изменения функции

5. Какое из утверждений ложно?

а) непрерывная функция всегда дифференцируема

б) функция, имеющая предел в точке **M**, может быть разрывна в этой точке

в) у дифференцируемой функции существуют частные производные

г) из непрерывности частных производных в точке **M** следует дифференцируемость функции в этой точке

6. Какое из утверждений истинно? В точке экстремума

а) градиент максимален

б) сходятся линии уровня

в) производные по любому направлению равны **O**

г) частные производные второго порядка связаны условием

$$f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0$$

7. Может ли линия уровня

а) проходить через точку экстремума

б) принадлежать касательной плоскости

в) пересекаться с другой линией уровня

г) быть перпендикулярна градиенту

## 3.12. Тема 12. Ряды.

Цель изучения этой темы ознакомления с понятиями числовых и функциональных рядов и их применением.

Данная тема включает в себя:

1) Числовые ряды. Частичные суммы. Сходимость и расходимость числовых рядов. Необходимое условие сходимости числового ряда
2) Достаточное признаки сходимости рядов с положительными числами: сравнения, Даламбера, Коши, интегральным Коши-Маклорена.
3) Знакопеременные ряды. Абсолютно и условно сходящиеся ряды
4) Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбица.
5) Понятие функционального ряда. Область сходимости. Сумму функционального ряда.
6) Понятие равномерной сходимости функционального ряда на множестве. Критерий Коши, свойства равномерно сходящихся функциональных рядов
7) Степенные ряды. Радиус и область сходимости. Формулы Даламбера и Коши для нахождения радиуса сходимости.
8) Разложение функции в степенные ряды. Теорему единственности. Необходимое и достаточное условие разложимости функций в степенной ряд. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.
9) Ряды Фурье. Разложение функций в ряд Фурье вычислением коэффициентов методом Фурье. Разложение по косинусам и синусам. Свойства.

***Изучив данную тему студент должен***
***Знать:***

- Понятие числового ряда, его частичных сумм, сходимости.
- Необходимый признак сходимости числового ряда.
- Достаточные признаки: сравнения, Даламбера, Коши, интегральный Коши-Маклорена.
- Знакопеременные ряды, абсолютную и условную сходимость.
- Признак Лейбница.
- Понятие функционального ряда, области его сходимости.
- Степенные ряды, формулы для нахождения радиуса сходимости.
- Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.
- Ряды Фурье, разложение функций в ряд Фурье.

***Уметь:***

- Исследовать числовой ряд на сходимость применяя различные признаки сходимости
- Исследовать на сходимость знакопеременные ряды
- Применять признак Лейбница
- Находить область сходимости функционального ряда
- Разложить в ряд Тейлора элементарную функцию
- Разложить в ряд Фурье и указать область сходимости

***При изучении данной темы студенту необходимо:***

- читать учебник [1] п.п. 9.1.1-9.3.2 [6] §7
- выполнить задания [6]№2449-2461; 2467-2469; 2483-2491; 2505-2510; 2525-2528; 2563-2570
- выполнить типовой расчет [3].

***Для самооценки темы нужно ответить на вопросы***

1) Что называется числовым рядом ? общим числом ряда?
2) Что называется суммой ряда? Дать определение сходящегося и расходящегося рядов. Привести примеры.
3) В чем состоит необходимый признак сходимости ряда? Привести пример, показывающий, что он не является достаточным
4) Сформулировать достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами
5) Какой ряд наз. знакочередующимся ? в чем состоит признак Лейбница для такого ряда? Доказать этот признак
6) Определить радиус сходимости и интервал сходимости степенного ряда
7) В чем заключается задача разложения функции *f(x)* в степенной ряд?
8) Как определяются коэффициенты ряда Тейлора?
9) Дать определение ряда Фурье
10) Как определяются коэффициенты ряда Фурье?

***Решить задачи:***

1° исследовать на сходимость ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n!};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n5^{n}}$$

2° найти область сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{n}x^{n}}{\sqrt{n}};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n}}{n^{2}};\ \sum_{n=1}^{\infty}x^{n}\cdot n!$$

3° разложить по степеням функции:

$$2^x; \left(1+\frac{x}{a}\right)^m; ln\frac{1+x}{1-x}$$

4° разложить в ряд Фурье функцию f(x)=$y^2$ при –П ≤ x ≤ П с периодом 2П.

### 3.13. Тема 13. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Цель изучения данной темы ознакомление с дифференциальными уравнениями и методами их решения.

Данная тема включает в себя :

1. понятие о дифференциальном уравнении. Задачи приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Дифференциальные уравнения 1 порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.
3. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Структура их общего решения
4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами в левой части и специального вида правой частью. Нахождение их общего решения.

***Изучив данную тему студент должен***

***Знать:***

1. Теорему существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения
2. Методы решения дифференциальных уравнений первого порядка: с разделяющимися переменными, однородных, линейных, Бернулли.
3. Методы решения уравнений, допускающих понижение порядка
4. Линейно зависимые и независимые системы функций. Определитель Вронского. Структуру общего решения линейного дифференциального уравнения 2 порядка
5. Метод множителей Лагранжа решения линейных дифференцированых уравнений.

***Уметь:***

- Определять порядок и тип дифференциального уравнения
- Решать дифференциальные уравнения: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли, в полных дифференциалах

- Определять линейную зависимость функций, вычислять определитель Вронского.
- Находить общее решение линейного неоднородного уравнения 2 порядка
- Метод множителей Лагранжа

***При изучении данной темы необходимо:***

- Читать : [1] п.п. 10.1-10.13
- Выполнить задания [6] № 2080-2084; 2112-2123; 21443-2141; 2175-2183; 2202-2212;2236-2248

***Для самооценки темы нужно***

1° ответить на вопросы

1. Что называется общим решением дифференциального уравнения
2. Сформулировать теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения.
3. Дать определение диф.уравнения с разделяющимися переменными и указать метод его решения.
4. Какое уравнение 1 порядка называется однородным ? Как оно решается?
5. Какое уравнение 1 порядка называется линейным ? Как оно решается?
6. Какое уравнение 1 порядка называется в полных дифференциалах ? Как оно решается?
7. Описать способ решения линейного уравнения второго порядка без правой части с постоянными коэффициентами. Какое уравнение наз.характеристическим? Как оно составляется?
8. Какой вид имеет общее решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами при действительных и различных корнях характеристического уравнения ? при равных корнях?
9. Разъяснить правило отыскания частного решения уравнения с правой частью вида

$$f(x) = e^{mx}\left[P_1(x)\cos nx + P_2(x)\sin nx\right],$$

Где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены. Привести примеры.

10. В чем заключается метод вариации произвольных постоянных Лагранжа.

2° выполнить задания:
решить уравнения:

1. $yy' = 2y - x$

2. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$

3. $y'x + y = -xy^2$ [

4. $(x^2 - y)dx + xdy = 0$

5. $y''' = \frac{6}{x^3}$

6. $x^3 y'' + x^2 y' = 1$

7. $yy'' + (y')^2 = 0$

8. $y'' - 2y + y = xe^x$

9. $y'' + 4y' + 5y = x^2$

10. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$

## 4. Литература.


1. Никишкин В.А., Максюков Н.И., Малахов А.Н. Высшая математика. Москва 2000
2. Малахов А.Н. Введение в математический анализ и дифференциальное исчисление(Методические указания и варианты типовогорасчета по вышей математике). Москвы 2001 г..
3. Малахов А.Н., Малахов Н.А. Ряды (Типовой расчет) МЭСИ 2001 г.
4. Малахов А.Н. Неопределенный и определенный интегралы. МЭСИ 2000г.
5. Малахов А.Н. Высшая математика (Учебное пособие для заочников) МЭСИ 1996г.
6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике “наука” 1970г.
7. Никишкин В.А., Максюков Н.И., Малахов А.Н. Программа и контрольные работы по дисциплине “Высшая математика” МЭСИ 1999г.